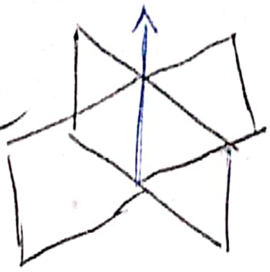
Dualité



STUCE → $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$

$\varphi_1, \dots, \varphi_p$ libre $\Leftrightarrow$ $\Phi \left(\begin{array}{l} E \to \mathbb{K}^p \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{array} \right)$ est surjective

↳ $\varphi \in E^*$: $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_i) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.

(équation caractéristique d'un corps) hyperplan

→ existence d'une base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* (faux en dim infinie)

→ F sev de E (en dim finie), alors F est intersection de $n - \dim F$ hyperplans

(Dém : utiliser la base duale).

not → $F^\circ = F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle = 0\}$

$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $E = F \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$

① $F^\circ = \mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$

② $F^{\circ\circ} = F$ $\left(\forall F \subset E^*\ F^\circ = \{x \in E\ \forall \varphi \in F\ \varphi(x) = 0\} \dots\right)$

not → Transposition : $t : \begin{array}{l} E^* \to E^* \\ u \mapsto {}^t u \end{array}$: $\forall \varphi \in E^*\ {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$

$\langle u(x), \varphi \rangle = \langle x, {}^t u(\varphi) \rangle$

↳ $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev de E : F stable par $u \Leftrightarrow F^\circ$ stable par ${}^t u$

→ La trace d'une AL ne dépend pas de la base

→ $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$ pour p un projecteur

→ $P_1, \dots, P_s$ projecteurs : $P_1 + \dots + P_s = Id \Rightarrow P_i \circ P_j = 0$. $i \neq j$

Complément → $\Phi \left(\begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})^* \\ A \longmapsto \Phi_A : B \longmapsto \operatorname{Tr}(AB) \end{array} \right)$

isomorphisme ($\dim M_n(\mathbb{K}) = \dim M_n(\mathbb{K})^*$ et $\operatorname{Ker} \Phi = 0$)

→ H hyperplan $\Rightarrow H$ contient au moins une matrice inversible. ($\exists A \; H = \operatorname{Ker} \Phi_A$)

Suite → $(f_1, \dots, f_n) \in F(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ libre

$\exists x_1, \dots, x_n \quad \det [f_i(x_j)]_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$